

О КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ УСТРАНИМОСТИ ОСОБЕННОСТЕЙ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НА МНОГООБРАЗИЯХ

© СКРЫПНИК И.И.

Донецк, Украина

1. Введение. В данной работе установлено точное условие, обеспечивающее устранимость особенности на гладком многообразии Γ решения нелинейного эллиптического уравнения

$$\sum_{i=1}^N \frac{d}{dx_i} a_i \left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) = a_0 \left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad x \in \Omega \setminus \Gamma. \quad (1.1)$$

Доказывается в критическом случае $N - p - s = 0$ устранимость особенности решения $u(x) \in W_{p,loc}^1(\Omega \setminus \Gamma)$ уравнения (1.1) на многообразии Γ размерности s при условии

$$u(x) = o(|\ln d(x, \Gamma)|) \quad (1.2)$$

где $d(x, \Gamma)$ – расстояние от точки x до многообразия Γ , N – размерность области Ω , $p \geq 2$.

В некритическом случае $N - p - s > 0$ точное условие устранимости особенности решения уравнения (1.1) имеет вид

$$u(x) = o\left([d(x, \Gamma)]^{\frac{p+s-N}{p-1}}\right). \quad (1.3)$$

Доказательство этого результата содержится в [1].

Результат данной статьи усиливает результат Дж. Серрина [2], получившего условие устранимости в критическом случае $N - p - s = 0$ в виде

$$u(x) = o(|\ln d(x, \Gamma)|^{1-\delta}), \quad \delta > 0. \quad (1.4)$$

В случае изолированных особенностей ($s = 0$) аналогичное усиление результатов Дж. Серрина содержится в [3]. Доказательство в данной статье принципиально отличается от доказательства в работе [2], и основано на новых поточечных оценках сингулярных решений. Отметим, что аналоги этих поточечных оценок для емкостных потенциалов были получены в [4, 5]. Неулучшаемость результатов данной работы следует из просто конструируемых решений с особенностями для

уравнения p -Лапласа. Полученный результат нов даже для линейных эллиптических уравнений с измеримыми коэффициентами.

Изучению проблемы сингулярностей решений нелинейных эллиптических уравнений посвящена обширная литература, однако, в большинстве работ изучаются уравнения специальной формы с операторами Лапласа или p -Лапласа в главной части. Обзор этих результатов имеется в монографии Л. Верона [6]. В частности, решения с точечной особенностью изучались в [7, 8].

2. Формулировка основных результатов. Далее s – натуральное число, не превышающее $N - 2$, Ω – ограниченное открытое множество в R^N . Будем предполагать, что функции $a_j(x, u, \xi)$, $j = 0, 1, \dots, N$ удовлетворяют следующим условиям:

$a_1)$ $a_j(x, u, \xi)$ определены для $x \in \Omega$, $u \in R^1$, $\xi \in R^N$ и являются измеримыми функциями x для всех $(u, \xi) \in R^1 \times R^N$ и непрерывными функциями u, ξ для почти всех $x \in \Omega$;

$a_2)$ существуют положительные числа ν_1, ν_2 такие, что для всех значений x, u, ξ выполнены неравенства

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N a_j(x, u, \xi) \xi_j &\geq \nu_1 |\xi|^p - g_1(x) |u|^p - f_1(x), \\ |a_j(x, u, \xi)| &\leq \nu_2 |\xi|^{p-1} + g_2(x) |u|^{p-1} + f_2(x), \quad j = 1, \dots, n \\ |a_0(x, u, \xi)| &\leq \nu_3(x) |\xi|^{p-1} + g_3(x) |u|^{p-1} + f_3(x) \end{aligned} \quad (2.1)$$

при $p = N - s$; здесь $\nu_3(x), g_i(x), f_i(x)$, $i = 1, 2, 3$ – неотрицательные функции, такие, что

$$\begin{aligned} \nu_3^p(x) &\in L^{p_1}(\Omega), \quad f_i(x), g_i(x) \in L^{p_i}(\Omega), \quad i = 1, 2, 3, \\ p_1 = p_3 &= \frac{(p-1)}{p} p_2 = \frac{N}{p-\delta}, \quad \delta \in \left(0, \frac{1}{2}\right). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Будем предполагать, что Γ – многообразие класса C^1 без границы размерности s , содержащееся в Ω . Будем говорить, что $u(x)$ – решение уравнения (1.1) в $\Omega \setminus \Gamma$, если для произвольной функции $\psi(x) \in C^1(\Omega \setminus \Gamma)$, равной нулю вблизи $\partial\Omega \cup \Gamma$ имеет место включение $u(x)\psi(x) \in \dot{W}_p^1(\Omega)$ и выполнено интегральное тождество

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} a_i\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) \frac{\partial}{\partial x_i} [\varphi \psi] dx + \int_{\Omega} a_0\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) \varphi \psi dx = 0 \quad (2.3)$$

для любой функции $\varphi(x) \in W_p^1(\Omega)$.

Обозначим $r_0 = \min\{d(\Gamma, \partial\Omega), 1\}$, где $d(\Gamma, \partial\Omega)$ – расстояние между Γ и $\partial\Omega$. Определим для $0 < r \leq r_0$

$$M(r) = \max\{|u(x)| : r \leq d(x, \Gamma) \leq r_0\}. \quad (2.4)$$

Хорошо известно, что в рассматриваемых условиях $u(x)$ локально гельдеровово в $\Omega \setminus \Gamma$, поэтому определение $M(r)$ корректно.

Будем говорить, что решение $u(x)$ уравнения (1.1) имеет устранимую особенность на многообразии Γ , если можно продолжить $u(x)$ на Γ таким образом, чтобы полученное продолжение $\tilde{u}(x)$ функции $u(x)$ удовлетворяло уравнению (1.1) в Ω и $\tilde{u}(x) \in W_{p,loc}^1(\Omega) \cap C(\Omega)$.

Будем говорить, что функция $\omega(r)$ является наилучшей для устранимости особенности $u(x)$ на многообразии Γ , если из условия

$$\limsup_{r \rightarrow 0} M(r) \omega(r) = 0 \quad (2.5)$$

следует устранимость особенности на Γ каждого решения уравнения (1.1), и если не существует иной функции $\bar{\omega}(r)$ такой, что условие

$$\limsup_{r \rightarrow 0} M(r) \bar{\omega}(r) = 0$$

обеспечивает устранимость особенности на Γ каждого решения уравнения вида (1.1) и $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\bar{\omega}(r)}{\omega(r)} = 0$.

Основным результатом работы является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть при $p = N - s$, $1 \leq s \leq N - 2$ выполнены условия $a_1), a_2)$ и пусть $u(x)$ — решение уравнения (1.1) в $\Omega \setminus \Gamma$. Предположим, что

$$\limsup_{r \rightarrow 0} M(r) |\ln r|^{-1} = 0. \quad (2.6)$$

Тогда особенность на многообразии Γ устранима и функция $|\ln r|^{-1}$ является наилучшей для устранимости особенности на многообразии Γ .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Условия на коэффициенты уравнения (1.1) можно писать с более сильным ростом относительно u , чем это предполагается в неравенстве (2.1). Достаточно для этого включить в $g_i(x)$ некоторые степени $u(x)$ аналогично тому, как это сделано в разделе 6 работы [2].

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Из доказательства теоремы 2.1 легко видеть, что можно заменить условие (2.6) следующими условиями

$$\begin{aligned} \sup \left\{ M(r) |\ln r|^{-1} : 0 < r \leq r_0 \right\} &< \infty, \\ \liminf_{r \rightarrow 0} M(r) |\ln r|^{-1} &= 0, \end{aligned} \quad (2.7)$$

которые также обеспечивают устранимость особенности решения уравнения (1.1) на многообразии Γ .

Теорема 2.1 следует из теоремы Серрина и следующей поточечной оценки

$$M(\rho) \leq K \left[\ln \frac{1}{\rho} \right]^{\frac{1}{2}} \left\{ \kappa \ln \ln \frac{1}{\rho} + M\left(r_0^{\frac{1}{\tau}}\right) \right\} \quad (2.8)$$

с некоторыми положительными постоянными K, κ, τ .

Доказательству оценки (2.8) посвящена основная часть статьи. Оценке (2.8) предшествуют интегральные оценки, полученные для градиента решения в разделе 3 и для решения уравнения (1.1) в разделе 4. Оценка (2.8) доказана в разделе 5, доказательство, на ее основе, теоремы 2.1 содержится в разделе 6.

3. Интегральные оценки градиента решения. Аналогично работе [1] будем получать локальные оценки решения. Переходом к локальным координатам можем распрямить многообразие Γ в окрестности рассматриваемой точки. Тем самым можем предполагать, что при некоторых $R_0, H_0 \in (0, 1)$ выполнено включение

$$C(R_0, H_0) \cap \Gamma \subset \{x_1 = \dots = x_{N-s} = 0\}, \quad (3.1)$$

где $C(R_0, H_0) = \{x \in R^n : |x'| < R_0, |x''| < H_0\}$ и $x' = (x_1, \dots, x_{N-s})$, $x'' = (x_{N-s+1}, \dots, x_N)$. Введем при $0 < r \leq R_0$ обозначения

$$m(r) = \max \{|u(x)| : x \in \overline{C(R_0, H_0)} \setminus C(r, H_0)\} \quad (3.2)$$

$$E(r) = \{x \in C(R_0, H_0) : u(x) > m(r)\} \quad (3.3)$$

и заметим, что (3.2) влечет включение $E(r) \subset C(r, H_0)$. Обозначим

$$u_r(x) = \max\{u(x) - m(r), 0\} \quad \text{для } x \in C(R_0, H_0) \setminus \Gamma. \quad (3.4)$$

Определим при $0 < r \leq R_0, x \in R^N$ функцию $\psi_r(x)$ следующими равенствами

$$\begin{aligned} \psi_r(x) &= 2 - 2 \frac{\ln |x'|}{\ln r} \quad \text{при } r \leq |x'| \leq \sqrt{r}, \\ \psi_r(x) &= 0 \quad \text{при } |x'| \leq r, \quad \psi_r(x) = 1 \quad \text{при } |x'| \geq \sqrt{r}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Зафиксируем некоторую функцию $\tau : R^1 \rightarrow R^1$ класса $C^\infty(R^1)$, удовлетворяющую условиям $\tau(t) = 1$ при $t \leq 1$, $\tau(t) = 0$ при $t \geq 2$,

$$-2 \leq \frac{d\tau(t)}{dt} \leq 0 \quad \text{при } t \in R^1.$$

Определим при $h > 0$ следующую функцию

$$\chi_h(x) = \tau\left(\frac{|x'' - \xi''|}{h}\right), \quad (3.6)$$

где $\xi'' = (\xi_{N-s+1}, \dots, \xi_N)$ — некоторая фиксированная точка, такая, что $|\xi''| \leq \frac{H}{2}$. Определим также при $0 < t \leq R_0$ функцию $\kappa(t)$ равенством

$$\kappa(t) = \max[m(r) \cdot |\ln r|^{-1} : t \leq r \leq R_0] \quad (3.7)$$

Ограниченность функции $\kappa(t)$ следует из условия (2.6), которое в дальнейшем предполагается выполненным.

Будем понимать под известными параметрами постоянные $\nu_1, \nu_2, N, p, \delta, R_0, H_0$, норм функций $\nu_3(x), f_i(x), g_i(x), i = 1, 2, 3$ в соответствующих пространствах. На протяжении всей работы через $C_j, j = 1, 2, \dots$ обозначаются постоянные, зависящие лишь от известных параметров.

ЛЕММА 3.1. Пусть выполнены условия теоремы 2.1. Тогда существуют положительные постоянные K_1, R_1 , зависящие лишь от известных параметров, такие, что при

$$0 < \sqrt{r} < \rho \leq R_1, \quad 0 < h \leq \frac{H_0}{2}, \quad \rho \leq h, \quad (3.8)$$

выполнена оценка

$$\begin{aligned} \int_{E(\rho)} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \psi_r^p(x) \chi_h^p(x) dx &\leq K_1 \left\{ m^p(r) \left[\ln \frac{1}{r} \right]^{1-p} h^s + \right. \\ &\left. + m^p(\rho) [\rho^{N-s} h^s]^{\frac{N-p+\delta}{N}} + \left[\frac{\rho}{h} \right]^p \int_{E(\rho)} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \psi_r^p(x) \chi_{2h}^p(x) dx \right\} \end{aligned} \quad (3.9)$$

с функциями $\psi_r(x), \chi_h(x)$, определенными равенствами (3.5), (3.6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы Серрина [2] об устранимости особенностей при выполнении условия (1.4) нужно доказывать теорему 2.1 только в случае $m(r) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow 0$. Поэтому можем подчинить R_1 условиям:

$$R_1 \leq R_0, \quad m(R_1) \geq 1 \quad (3.10)$$

Подставим в интегральное тождество (2.3) следующие функции

$$\varphi(x) = u_\rho(x) \psi_r^p(x) \chi_h^p(x), \quad \psi(x) = \psi_{r^2}(x) \chi_{2h}(x),$$

предполагая, что $0 < \sqrt{r} < \rho \leq \frac{R_0}{2}$, $0 < h \leq \frac{H_0}{2}$. Используя условия (2.1) и неравенство Юнга, получим оценку

$$\int_{E(\rho)} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \psi_r^p(x) \chi_h^p(x) dx \leq C_1 \sum_{i=1}^5 I_i, \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{E(\rho)} h_1(x) u_\rho^p(x) \psi_r^p(x) \chi_h^p(x) dx, \\ I_2 &= \int_{E(\rho)} u_\rho^p(x) \left| \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \right|^p \chi_h^p(x) dx, \quad I_3 = \int_{E(\rho)} u_\rho^p(x) \psi_r^p(x) \left| \frac{\partial \chi_h}{\partial x} \right|^p dx, \\ I_4 &= \int_{E(\rho) \cap K(r)} u^p(x) [f_2(x) + g_2(x)]^{\frac{p}{p-1}} \chi_h^p(x) dx, \\ I_5 &= m^p(\rho) \int_{E(\rho)} h_2(x) \psi_r^p(x) \chi_h^p(x) dx, \end{aligned} \quad (3.12)$$

где использованы следующие обозначения

$$\begin{aligned} h_1(x) &= f_1(x) + g_1(x) + [f_2(x) + g_2(x)]^{\frac{p}{p-1}} + f_3(x) + g_3(x) + \nu_3^p(x), \\ h_2(x) &= f_1(x) + g_1(x) + [f_2(x) + g_2(x)]^{\frac{p}{p-1}} + f_3(x) + g_3(x), \\ K(r) &= \{x \in R^N : r \leq |x'| \leq \sqrt{r}\}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Далее будем оценивать слагаемые правой части (3.11). Используя условия (2.2) и неравенство Гельдера, получаем

$$I_1 \leq [\text{mes } E(\rho)]^{\frac{\delta}{N}} \left\{ \int_{E(\rho)} [h_1(x)]^{\frac{N}{p-\delta}} dx \right\}^{\frac{p-\delta}{N}} \cdot \left\{ \int_{E(\rho)} [u_\rho(x) \psi_r(x) \chi_h(x)]^{\frac{Np}{N-p}} dx \right\}^{\frac{N-p}{Np}} \quad (3.14)$$

Применяя далее теорему вложения, имеем оценку

$$I_1 \leq C_2 [\text{mes } E(\rho)]^{\frac{\delta}{N}} \cdot \left\{ \int_{E(\rho)} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \psi_r^p(x) \chi_h^p(x) dx + m^p(r) \left[\ln \frac{1}{r} \right]^{1-p} h^s + I_3 \right\} \quad (3.15)$$

Непосредственно из определения $m(r)$ и выбора функции $\psi_r(x)$ следует оценка

$$I_2 \leq C_3 m^p(r) \left[\ln \frac{1}{r} \right]^{1-p} h^s. \quad (3.16)$$

Интеграл I_3 оценим, используя неравенство Пуанкаре по переменной x' и получим

$$I_3 \leq \left(\frac{2}{h} \right)^p \int_{E(\rho)} u_\rho^p(x) \psi_r^p(x) \chi_{2h}^p(x) dx \leq \leq C_4 \left\{ \left(\frac{\rho}{h} \right)^p \int_{E(\rho)} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \psi_r^p(x) \chi_{2h}^p(x) dx + m^p(r) \left[\ln \frac{1}{r} \right]^{1-p} h^s \right\}. \quad (3.17)$$

Интеграл I_4 оценим, мажорируя $u_\rho(x)$ через $m(r)$ и применяя неравенство Гельдера. В результате имеем следующее неравенство

$$I_4 \leq C_5 m^p(r) \left[r^{\frac{N-s}{2}} h^s \right]^{\frac{N-p+\delta}{N}}. \quad (3.18)$$

Наконец, в силу (2.2) и неравенства Гельдера, имеем

$$I_5 \leq C_6 m^p(\rho) [\rho^{N-s} h^s]^{\frac{N-p+\delta}{N}}. \quad (3.19)$$

Подчиним, в дополнение к (3.10), R_1 условию

$$C_2 [\text{mes } C(R_1, H_0)]^{\frac{\delta}{N}} < \frac{1}{2} \quad (3.20)$$

Пользуясь тем, что при $\rho \leq R_1$ имеет место включение $E(\rho) \subset C(R_1, H_0)$, получаем из (3.11)-(3.19) оценку (3.9), что и заканчивает доказательство леммы 3.1.

Нам понадобится глобальный аналог оценок (3.9). Можно построить функцию $\tilde{d}: \bar{\Omega} \rightarrow R^1$ класса C^1 такую, что для $x \in \bar{\Omega}$ выполнено неравенство

$$k_1 d(x, \Gamma) \leq \tilde{d}(x) \leq k_2 d(x, \Gamma) \quad (3.21)$$

с неотрицательными постоянными k_1, k_2 , которые тоже будем включать в множество известных параметров. При этом можем подчинить функцию $\tilde{d}$ условию $\tilde{d}(x) = |x'|$ при $x \in C(R_0, H_0)$.

Определим

$$\begin{aligned}\tilde{C}(r) &= \{x \in \bar{\Omega} : \tilde{d}(x) < r\}, \tilde{m}(r) = \max\{|u(x)| : x \in \bar{\Omega} \setminus \tilde{C}(r)\}, \\ \tilde{u}_r(x) &= \max\{u(x) - \tilde{m}(r), 0\}, \tilde{E}(r) = \{x \in \bar{\Omega} : u(x) > \tilde{m}(r)\},\end{aligned}\quad (3.22)$$

и функцию $\tilde{\psi}_r(x)$, определяемую равенствами, получаемыми из (3.5) заменой $|x'|$ на $\tilde{d}(x)$.

Подставляя в (2.3) функции

$$\varphi(x) = \tilde{u}_\rho(x) \tilde{\psi}_r^{p-1}(x), \quad \psi(x) = \tilde{\psi}_r(x)$$

и оценивая возникающие интегралы подобно оценкам в доказательстве леммы 3.1, получаем следующую лемму.

ЛЕММА 3.2. *Предположим, что выполнены условия теоремы 2.1. Тогда существуют положительные постоянные K_2, R_2 , зависящие лишь от известных параметров такие, что при $0 < \sqrt{r} < \rho \leq R_2$, выполнена оценка*

$$\int_{\tilde{E}(\rho)} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \tilde{\psi}_r^p(x) dx \leq K_2 \left\{ \tilde{m}^p(r) \left[\ln \frac{1}{r} \right]^{1-p} + \tilde{m}^p(\rho) \rho^{\frac{(N-s)(N-p+\delta)}{N}} \right\} \quad (3.23)$$

Заметим, что с некоторыми положительными постоянными k_3, k_4 выполнено неравенство

$$\tilde{m}(k_3 r) \leq m(r) \leq \tilde{m}(k_4 r) \quad (3.24)$$

при $0 < r \leq R_0$.

ЛЕММА 3.3. *Пусть выполнены условия теоремы 2.1. Тогда существуют положительные постоянные K_3, R_3, γ_1 , зависящие лишь от известных параметров, такие, что при*

$$0 < \sqrt{r} < \rho \leq R_3, \quad 0 < h \leq \frac{H_0}{2}, \quad \rho \leq \gamma_1 h \quad (3.25)$$

выполнена оценка

$$\begin{aligned}\int_{E(\rho)} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \psi_r^p(x) \chi_h^p(x) dx &\leq K_3 \left\{ m^p(r) \left[\ln \frac{1}{r} \right]^{1-p} h^s + \right. \\ &\left. + m^p(\rho) [\rho^{N-s} h^s]^{\frac{(N-p+\delta)}{N}} \right\}.\end{aligned}\quad (3.26)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка (3.26) доказывается индукцией по j для $h = h_j = \frac{H_0}{2^j}$. При $j = 1$ эта оценка следует из неравенства (3.23). Проверка индуктивного предположения осуществляется с использованием оценки (3.9). Подробный вывод оценки вида (3.26) содержится в [1] для некритического случая $N - p - s > 0$.

Определим при $0 < \rho' < \rho \leq \frac{R_0}{2}$ множество

$$E(\rho', 2\rho) = \{x \in E(2\rho) : u(x) < m(\rho')\}. \quad (3.27)$$

и при $\rho > 0$ функцию

$$u^{(\rho)}(x) = \min\{u(x), m(\rho)\}, \quad x \in C(R_0, H_0). \quad (3.28)$$

ЛЕММА 3.4. Предположим, что выполнено условие теоремы 2.1 и пусть $\theta \in (0, \frac{1}{2}]$ – некоторое число, зависящее лишь от известных параметров. Тогда существуют положительные постоянные K_4, R_4 , зависящие лишь от известных параметров, такие, что при $\rho \leq R_4$

$$0 < \sqrt{r} < \frac{\theta \rho}{2} < \rho' \leq \theta \rho, \quad \rho \leq \gamma_1 h \quad (3.29)$$

выполнена оценка

$$\int_{E(\rho', \rho)} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \psi_r^p(x) \chi_h^p(x) dx \leq K_4 \{ J^{(1)} + J^{(2)} + J^{(3)} + R^{(1)}(r, \rho', h) \}, \quad (3.30)$$

где использованы следующие обозначения

$$\begin{aligned} J^{(1)} &= [m(\rho') - m(\rho)]^{\frac{p}{p-1}} \cdot \\ &\cdot \int_{E(\rho')} [u(x) - m(\rho)]^{-\frac{p}{p-1}} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \psi_r^p(x) \chi_h^p(x) dx, \\ J^{(2)} &= \frac{1}{h^p} \int_{E(\rho)} [u(x) - m(\rho)]^p \psi_r^p(x) \chi_{2h}^p(x) dx, \\ J^{(3)} &= \int_{E(\rho')} [u(x)]^p h_1(x) \psi_r^p(x) \chi_h^p(x) dx, \\ R^{(1)}(r, \rho, h) &= m(\rho) m^{p-1}(r) \left[\ln \frac{1}{r} \right]^{1-p} h^s + \\ &+ m^p(\rho) \left\{ [\rho^{N-s} h^s]^{\frac{N-p+\delta}{N}} + \left[\ln \frac{1}{r} \right]^{\frac{1-p}{p}} h^s \right\}, \end{aligned} \quad (3.31)$$

и функция $h_1(x)$ определяется равенством в (3.13).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставим в интегральное тождество (2.3) следующие функции $\psi(x) = \psi_{r^2}(x) \chi_{2h}(x)$,

$$\varphi(x) = \max\{[u^{\rho'}(x)] - m(\rho), 0\} \psi_r^p(x) \chi_h^p(x)$$

в предположении, что выполнено условие (3.29) и $\rho \leq \min(R_1, R_2)$.

Дальнейшие выкладки аналогичны доказательству леммы 3.4 в [1] с изменениями, возникающими при оценке интегралов, содержащих $\left| \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \right|$. Поэтому их опускаем.

Будем предполагать далее, что выполнено условие

$$m(\rho') - m(\rho) > 0 \quad (3.32)$$

для рассматриваемых значений ρ', ρ .

ЛЕММА 3.5. Предположим, что выполнены условия леммы 3.4 и неравенство (3.32). Тогда существует положительная постоянная K_5 , зависящая лишь от известных параметров, такая, что справедлива оценка

$$J^{(1)} \leq K_5 \left\{ m(\rho') \left[m^{p-1}(r) \left[\ln \frac{1}{r} \right]^{1-p} h^s + m^{p-1}(\rho') \left[\ln \frac{1}{r} \right]^{\frac{1-p}{p}} h^s \right] + J^{(2)} + J^{(3)} \right\}, \quad (3.33)$$

где $J^{(1)}, J^{(2)}, J^{(3)}$ определены равенствами (3.31).

Доказательство аналогично доказательству леммы 3.5 в [1].

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть выполнены условия теоремы 2.1 и предположим, что r, ρ, ρ', h удовлетворяют условиям леммы 3.4. Тогда существует положительная постоянная K_6 , зависящая только от известных параметров, такая, что выполнена оценка

$$\begin{aligned} \int_{E(\rho', \rho)} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \psi_r^p(x) \chi_h^p(x) dx &\leq K_6 \left\{ R^{(1)}(r, \rho', h) + \right. \\ &\left. + \int_{E(\rho)} [u(x) - m(\rho)]^p \psi_r^p(x) \left[h_1(x) \chi_h^p(x) + \frac{1}{h^p} \chi_{2h}^p(x) \right] dx \right\}, \end{aligned} \quad (3.34)$$

где $h_1(x), R^{(1)}(r, \rho, h)$ определены равенствами (3.13), (3.31).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем считать, что выполнено условие (3.32), так как в противном случае неравенство (3.34) очевидно. Оценка слагаемого $J^{(1)}$ в правой части неравенства (3.30) дана в лемме 3.5. Оценку $J^{(3)}$ получаем, используя неравенство

$$u^p(x) \leq C_7 \{ [u(x) - m(\rho)]^p + [m(\rho)]^p \} \quad \text{для } x \in E(\rho)$$

и неравенство Юнга. Используя получаемую таким образом оценку $J^{(3)}$, устанавливаем неравенство (3.34) из (3.30), (3.33) и, тем самым, теорема 3.1 доказана.

4. Интегральная оценка решения. Введем обозначения

$$I(\rho, h) = \left\{ \int_{E(\rho)} [(u(x) - m(\rho)) \psi_r(x) \chi_h(x)]^{\frac{Np}{N-p+\delta}} dx \right\}^{\frac{N-p+\delta}{N}} \cdot [\rho^{N-s} h^s]^{\frac{p-\delta}{N}} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{(N-s)(p-\frac{\delta}{2})}{N}, \quad \beta_1 = s + \frac{sp}{N}, \\ \alpha_2 &= p + \frac{\delta(N-s)}{2N}, \quad \beta_2 = s + \delta \frac{s}{N}, \\ \alpha_3 &= \left(p - \frac{\delta}{2} \right) \frac{N-s}{N}, \quad \beta_3 = s + \frac{sp}{N}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

ЛЕММА 4.1. Предположим, что выполнены условия леммы 3.4. Существуют постоянные K_7, R_5 , зависящие лишь от известных параметров, такие, что $R_5 \leq R_4$ и при $\rho \leq R_5$ справедлива оценка

$$I(\rho, h) \leq 2^{p-1} \theta^{-\frac{(N-s)(p-\delta)}{N}} I(\theta\rho, h) + K_7 \left(\frac{\rho}{h}\right)^{(N-s)\frac{p}{N}} I(\rho, 2h) + R^{(2)}(r, \rho, h), \quad (4.3)$$

где

$$R^{(2)}(r, \rho, h) = K_7 \left\{ \rho^{\alpha_1} h^{\beta_1} \kappa(r) m^{p-1}(r) \left[\ln \frac{1}{r} \right]^{1-p} + \left[\rho^{\alpha_2} h^{\beta_2} + \rho^{\alpha_3} h^{\beta_3} \left[\ln \frac{1}{r} \right]^{\frac{1-p}{p}} \right] \cdot [\kappa(r)]^p \right\}$$

и функция $\kappa(r)$ определена равенством (3.7).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\chi(E(\theta\rho, \rho)), \chi(E(\theta\rho))$ характеристические функции множеств $E(\theta\rho, \rho), E(\theta\rho)$ соответственно. Займемся оценкой $I(\rho, h)$ и будем использовать для этого следующее неравенство

$$\begin{aligned} \{u(x) - m(\rho)\}^p &\leq \{u(x) - m(\rho)\}^p \chi(E(\theta\rho, \rho)) + \\ &+ 2^{p-1} \{[u(x) - m(\theta\rho)]^p + [m(\theta\rho) - m(\rho)]^p\} \chi(E(\theta\rho)) \leq \\ &\leq 2^{p-1} [u(x) - m(\theta\rho)]^p \chi(E(\theta\rho)) + \\ &+ 2^{p-1} \{u^{(\theta\rho)}(x) - m(\rho)\}^p \quad \text{для } x \in E(\rho). \end{aligned}$$

Получаем, таким образом, следующую оценку

$$I(\rho, h) \leq 2^{p-1} \theta^{-\frac{N-s}{N}(p-\delta)} I(\theta\rho, h) + 2^{p-1} [\rho^{N-s} h^s]^{\frac{p}{N}} I_6, \quad (4.4)$$

где

$$I_6 = \left\{ \int_{E(\rho)} \left\{ [u^{(\theta\rho)}(x) - m(\rho)] \psi_r(x) \chi_h(x) \right\}^{\frac{Np}{N-p}} dx \right\}^{\frac{N-p}{N}}$$

Оценивая последний интеграл по теореме вложения, имеем

$$I_6 \leq C_8 (I_7 + I_8 + I_9), \quad (4.5)$$

где

$$\begin{aligned} I_7 &= \int_{E(\theta\rho, \rho)} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \psi_r^p(x) \chi_h^p(x) dx, \\ I_8 &= m^p(\theta\rho) \int_{E(\rho) \cap K(r)} \left| \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \right|^p \chi_h^p(x) dx, \\ I_9 &= \int_{E(\rho)} [u^{(\theta\rho)}(x) - m(\rho)]^p \psi_r^p(x) \left| \frac{\partial \chi_h}{\partial x} \right|^p dx. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Продолжим оценку полученных в (4.6) интегралов. Интеграл I_7 оценим по теореме 3.1 с последующим применением неравенства Гельдера и получаем

$$I_7 \leq C_9 \{ R^{(1)}(r, \theta\rho, h) + I(\rho, h) [\rho^{N-s} h^s]^{\frac{\delta-p}{N}} + \frac{1}{h^p} I(\rho, 2h) \}. \quad (4.7)$$

Оценка I_8 следует из определения функции $\psi_r(x)$

$$I_8 \leq C_{10} m^p(\theta\rho) \left[\ln \frac{1}{r} \right]^{1-p} h^s. \quad (4.8)$$

Интеграл I_9 оцениваем по неравенству Гельдера и получаем

$$I_9 \leq \frac{C_{11}}{h^p} \int_{E(\rho)} [u(x) - m(\rho)]^p \psi_r^p(x) \chi_{2h}^p(x) dx \leq \frac{C_{12}}{h^p} I(\rho, 2h). \quad (4.9)$$

Наконец, используя (3.7), можем оценить

$$m(t) \leq \kappa(r) \ln \frac{1}{t} \quad (4.10)$$

при $r \leq t \leq R_0$ и получить следующее неравенство

$$\begin{aligned} R^{(1)}(r, \theta\rho, h) [\rho^{N-s} h^s]^{\frac{p}{N}} &\leq C_{13} \left\{ \rho^{\alpha_1} h^{\beta_1} \kappa(r) [m(r)]^{p-1} \left[\ln \frac{1}{r} \right]^{1-p} + \right. \\ &\left. + \left[\rho^{\alpha_2} h^{\beta_2} + \rho^{\alpha_3} h^{\beta_3} \left[\ln \frac{1}{r} \right]^{\frac{1-p}{p}} \right] [\kappa(r)]^p \right\}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

где α_i, β_i определены равенствами (4.2).

Теперь оценка (4.3) следует из неравенств (4.4)-(4.11) при достаточно малом ρ , что и заканчивает доказательство леммы 4.1.

Определим далее числа θ, γ равенствами

$$\ln \frac{1}{\theta} = \frac{4pN}{\delta(N-s)} \ln 2, \quad \gamma = \min(\gamma_1, \gamma_2), \quad (4.12)$$

где γ_2 определяется условием $K_7 \gamma_2^{(N-s)\frac{p}{N}} = 2^{-2(N+1)}$ и K_7 — постоянная из неравенства (4.3).

ТЕОРЕМА 4.1. *Предположим, что выполнены условия леммы 3.4 и пусть θ, γ определяются условиями (4.12). Существует постоянная K_8 , зависящая лишь от известных параметров, такая, что при $\rho \leq R_5, \rho \leq \gamma h$ выполнена оценка*

$$\begin{aligned} I(\rho, h) &\leq K_8 \left\{ \rho^{N-s} h^s [m(r)]^p \left(\frac{\sqrt{r}}{\rho} \right)^{\frac{sp}{N}} + \right. \\ &\left. + h^N \rho^p [\kappa(r)]^p + R^{(2)}(r, \rho, h) \right\}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

где $I(\rho, h)$, $R^{(2)}(r, \rho, h)$ и число R_5 определены равенствами в (4.1), (4.3) и леммой 4.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем числа r, ρ, h , удовлетворяющие условиям теоремы, и определим

$$A = 2^{p-1} \cdot \theta^{-\frac{(N-s)(p-\delta)}{N}}, \quad B = K_7 \gamma^{(N-s)\frac{p}{N}} \quad (4.14)$$

и целые числа M_1, M_2 условиями

$$\sqrt{r} < \rho \theta^{M_1} \leq \frac{\sqrt{r}}{\theta}, \quad \frac{H_0}{2} \leq 2^{M_2} h < H_0. \quad (4.15)$$

С учетом этих обозначений неравенство (4.3) переписывается в виде

$$I(\rho, h) \leq A I(\theta \rho, h) + B I(\rho, 2h) + R^{(2)}(r, \rho, h). \quad (4.16)$$

Итерируя последнее неравенство и применяя индукцию по числу итераций, получим оценку

$$\begin{aligned} I(\rho, h) &\leq \sum_{m=0}^{M_2-1} 2^{M_1+m} A^{M_1} B^m I\left(\frac{\sqrt{r}}{\theta}, 2^m h\right) + \\ &+ \sum_{n=0}^{M_1-1} 2^{M_2+n} A^n B^{M_2} I(\theta^n \rho, H_0) + \\ &+ \sum_{n=0}^{M_1-1} \sum_{m=0}^{M_2-1} 2^{n+m} A^n B^m R^{(2)}(r, \theta^n \rho, 2^m h). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Оценим далее значения $I\left(\frac{\sqrt{r}}{\theta}, 2^m h\right)$, $I(\theta^n \rho, H_0)$ и первые две суммы в (4.17). Используя определение функции $\psi_r(x)$ и равенство (3.3), имеем оценку

$$I\left(\frac{\sqrt{r}}{\theta}, 2^m h\right) \leq C_{14} 2^{ms} [m(r)]^p r^{\frac{N-s}{2}} h^s. \quad (4.18)$$

Из этой оценки, определения A, B и условий (4.12) получаем следующую оценку для первого слагаемого правой части (4.17)

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{M_2-1} 2^{M_1+m} A^{M_1} B^m I\left(\frac{\sqrt{r}}{\theta}, 2^m h\right) &\leq \\ &\leq C_{15} [m(r)]^p r^{\frac{N-s}{2}} h^s [\theta^{-M_1}]^{\frac{(N-s)(p-\delta)}{N} - p \frac{\ln 2}{\ln \theta}} \sum_{m=0}^{M_2-1} [2^{s+1} B]^m \leq \\ &\leq C_{16} [m(r)]^p r^{\frac{N-s}{2}} h^s \left(\frac{\rho}{\sqrt{r}}\right)^{\frac{(N-s)(p-\delta)}{N} - p \frac{\ln 2}{\ln \theta}} \sum_{m=0}^{M_2-1} [2^{s+1} K_6 \gamma^{\frac{(N-s)p}{N}}]^m \leq \\ &\leq C_{17} \rho^{N-s} h^s [m(r)]^p \left(\frac{\sqrt{r}}{\rho}\right)^{\frac{sp}{N}}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Используя оценку (4.10), имеем следующее неравенство

$$I(\theta^n \rho, H_0) \leq C_{18} [\kappa(r)]^p [\theta^n \rho]^{\frac{(N-s)(p-\delta)}{N}} \cdot \left\{ \int_r^{\theta^n \rho} \left[\ln \frac{1}{t} \right]^{\frac{pN}{N-p+\delta}} t^{N-s-1} dt \right\}^{\frac{N-p+\delta}{N}} \leq C_{19} [\theta^n \rho]^p \left[\ln \frac{1}{\theta^n \rho} \right]^p [\kappa(r)]^p. \quad (4.20)$$

Применяя оценку, полученную в (4.20), и учитывая значения θ, γ , получаем следующую оценку второй суммы в (4.17)

$$\sum_{n=0}^{M_1-1} 2^{M_2+n} A^n B^{M_2} I(\theta^n \rho, H_0) \leq C_{20} [2K_7 \gamma^{(N-s)\frac{p}{N}}]^{M_2} \rho^p [\kappa(r)]^p \cdot \sum_{n=0}^{M_1-1} [2^p \theta^{-\frac{(N-s)(p-\delta)}{N} + p}]^n \left[\ln \frac{1}{\theta^n \rho} \right]^p \leq C_{21} \rho^p h^N [\kappa(r)]^p \left[\ln \frac{1}{\rho} \right]^p. \quad (4.21)$$

Далее оцениваем третью сумму в (4.17)

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{M_1-1} \sum_{m=0}^{M_2-1} 2^{n+m} A^n B^m R^{(2)}(r, \theta^n \rho, 2^m h) \leq \\ & \leq C_{22} \kappa(r) m^{p-1}(r) \left[\ln \frac{1}{r} \right]^{1-p} \rho^{\alpha_1} h^{\beta_1} \cdot \sum_{n=0}^{M_1-1} [2^p \theta^{-\frac{(N-s)(p-\delta)}{N} + \alpha_1}]^n \cdot \sum_{m=0}^{M_2-1} [2^{\beta_1+1} K_7 \gamma^{(N-s)\frac{p}{N}}]^m + \\ & + C_{22} [\kappa(r)]^p \rho^{\alpha_2} h^{\beta_2} \sum_{n=0}^{M_1-1} [2^p \theta^{-\frac{(N-s)(p-\delta)}{N} + \alpha_2}]^n \cdot \sum_{m=0}^{M_2-1} [2^{\beta_2+1} K_7 \gamma^{(N-s)\frac{p}{N}}]^m + C_{22} [\kappa(r)]^p \left[\ln \frac{1}{r} \right]^{\frac{1-p}{p}} \rho^{\alpha_3} h^{\beta_3} \cdot \\ & \cdot \sum_{n=0}^{M_1-1} [2^p \theta^{-\frac{(N-s)(p-\delta)}{N} + \alpha_3}]^n \sum_{m=0}^{M_2-1} [2^{\beta_3+1} K_7 \gamma^{(N-s)\frac{p}{N}}]^m \leq \\ & \leq C_{23} R^{(2)}(r, \rho, h). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Теперь оценка (4.13) непосредственно следует из неравенств (4.17), (4.19), (4.21), (4.22) и доказательство теоремы 4.1 закончено.

5. Поточечная оценка решения. В этом разделе доказывается следующая теорема.

ТЕОРЕМА 5.1. *Предположим, что выполнены условия теоремы 2.1. Тогда существует положительная постоянная K_9 , зависящая лишь от известных параметров, такая, что при произвольных ρ , удовлетворяющих условию $2\rho \leq \min \{d(\Gamma, \partial\Omega), \frac{1}{\varepsilon}\}$, выполнена оценка*

$$M(\rho) \leq K_9 \left[\ln \frac{1}{\rho} \right]^{\frac{1}{2}} \left\{ \kappa \ln \ln \frac{1}{\rho} + M(r_0^{\frac{1}{\tau}}) \right\}, \quad (5.1)$$

где $\kappa = \sup \left\{ M(t) \left| \ln \frac{1}{t} \right|^{-1} : 0 < t \leq r_0 \right\}$.

Доказательство. В силу эквивалентности поведения при малых ρ функций $M(\rho)$ и $m(\rho)$, последняя из которых определена равенством (3.1), доказательство оценки (5.1) сводится к доказательству оценки в локальной системе координат.

Используя метод Мозера, получим аналогично доказательству теоремы 5.1 в [1] оценку

$$[m(\rho)]^p \leq C_{24} \rho^{-N} \int_{E(2\rho)} [u(x)]^p \eta^p(x) dx. \quad (5.2)$$

В дальнейших рассуждениях предполагаем, что выполнено неравенство

$$m(2\rho) - m((2\rho)^\tau) \geq \mu m(2\rho) \quad (5.3)$$

с постоянной μ , определенной следующим образом

$$\mu = 1 - \sqrt{\tau}. \quad (5.4)$$

В этом случае имеем оценку

$$u(x) \geq \frac{1}{1-\mu} m((2\rho)^\tau) \quad \text{при } x \in E(2\rho)$$

и поэтому получаем неравенство

$$\int_{E(2\rho)} [u(x)]^p \eta^p(x) dx \leq C_{25} \int_{E((2\rho)^\tau)} [u(x) - m((2\rho)^\tau)]^p \psi_r^p(x) \chi_h^p(x) dx \quad (5.5)$$

с функциями $\psi_r(x), \chi_h(x)$, определенными равенствами (3.5), (3.6) при $\sqrt{r} < \min \left\{ \theta(2\rho)^\tau, \frac{\rho}{2} \right\}$, $h = \frac{(2\rho)^\tau}{\gamma}$.

Применяя неравенства Гельдера и (4.13), получаем из (5.2), (5.5) следующую оценку

$$[m(\rho)]^p \leq C_{26} \left\{ [m(r)]^p \left(\frac{\sqrt{r}}{\rho^\tau} \right)^{\frac{2p}{N}} + \kappa(r) [m(r)]^{p-1} \rho^{-\frac{\tau\delta(N-s)}{2N}} \left[\ln \frac{1}{r} \right]^{1-p} + \right. \\ \left. + \kappa^p(r) \left(\rho^{\frac{\tau\delta}{2}(1+\frac{s}{N})} + \rho^{-\frac{\tau\delta}{2} \frac{N-s}{N}} \left[\ln \frac{1}{r} \right]^{\frac{1-p}{p}} \right) \right\} \rho^{(\tau-1)N}, \quad (5.6)$$

которая доказана в предположении, что выполнено неравенство (5.3).

Если же (5.3) не выполняется, то

$$m(2\rho) \leq \frac{1}{1-\mu} m((2\rho)^\tau), \quad (5.7)$$

и из (5.6), (5.7) получаем следующую оценку, которая справедлива независимо от того выполнено или нет неравенство (5.3)

$$m(2\rho) \leq C_{27} \left\{ m(r) \left(\frac{\sqrt{r}}{\rho^\tau} \right)^{\frac{s}{N}} + [\kappa(r)]^{\frac{1}{p}} \left[m(r) \left(\ln \frac{1}{r} \right)^{-1} \right]^{\frac{p-1}{p}} \rho^{-\frac{\tau\delta(N-s)}{2Np}} + \right. \\ \left. + \kappa(r) \left(\rho^{\frac{\tau\delta(N+s)}{2N}} + \rho^{-\frac{\tau\delta(N-s)}{2N}} \left[\ln \frac{1}{r} \right]^{\frac{1-p}{p}} \right)^{\frac{1}{p}} \right\} \rho^{\frac{(\tau-1)N}{p}} + \frac{1}{1-\mu} \cdot m((2\rho)^\tau). \quad (5.8)$$

Определим целое число $I(\rho)$ условием $(2\rho)^{\tau^{I(\rho)}} = R_*$, где $R_0^{\frac{1}{\tau}} \leq R_* < R_0$. Итерируя неравенство (5.8), получаем оценку

$$m(2\rho) \leq C_{28} \sum_{i=1}^{I(\rho)} \left\{ m(r) \left[\frac{\sqrt{r}}{(2\rho)^{\tau^i}} \right]^{\frac{s}{N}} + \right. \\ \left. + [\kappa(r)]^{\frac{1}{p}} \left[m(r) \left(\ln \frac{1}{r} \right)^{-1} \right]^{\frac{p-1}{p}} (2\rho)^{-\frac{\tau^i\delta(N-s)}{2Np}} + \right. \\ \left. + \kappa(r) \left[(2\rho)^{\frac{\tau^i\delta(N+s)}{2N}} + (2\rho)^{-\frac{\tau^i\delta(N-s)}{2N}} \left[\ln \frac{1}{r} \right]^{\frac{1-p}{p}} \right]^{\frac{1}{p}} \right\} \cdot \\ \cdot (2\rho)^{\frac{\tau^{i-1}N(\tau-1)}{p}} \frac{1}{(1-\mu)^{i-1}} + \frac{C_{28}}{(1-\mu)^{I(\rho)}} m((2\rho)^{\tau^{I(\rho)}}). \quad (5.9)$$

В силу выбора $\tau, \mu, I(\rho)$ имеем

$$\frac{\tau^i\delta(N+s)}{2N} + \frac{\tau^{i-1}N(\tau-1)}{p} = \frac{\tau^{i-1}\delta(N+s)}{4N}, \\ \left(\frac{1}{1-\mu} \right)^{I(\rho)} = \tau^{-\frac{I(\rho)}{2}} = \left[\frac{\ln \frac{1}{2\rho}}{\ln \frac{1}{R_*}} \right]^{\frac{1}{2}}, \\ I(\rho) = \frac{1}{\ln \frac{1}{\tau}} \left\{ \ln \ln \frac{1}{2\rho} - \ln \ln \frac{1}{R_*} \right\}. \quad (5.10)$$

Используя равенство (5.10), получаем из (5.9) следующую оценку

$$m(2\rho) \leq C_{29} \left[\ln \frac{1}{2\rho} \right]^{\frac{1}{2}} \ln \ln \frac{1}{2\rho} \left\{ \left[m(r) \left(\frac{\sqrt{r}}{\rho^\tau} \right)^{\frac{s}{N}} + \right. \right. \\ \left. + [\kappa(r)]^{\frac{1}{p}} \left[m(r) \left(\ln \frac{1}{r} \right)^{-1} \right]^{\frac{p-1}{p}} \rho^{-\frac{\tau\delta(N-s)}{2Np}} \right] \rho^{\frac{N(\tau-1)}{p}} + \\ \left. + \kappa(r) \left[1 + \rho^{-\frac{\tau\delta(N-s)}{2N}} + \frac{N(\tau-1)}{p} \left[\ln \frac{1}{r} \right]^{\frac{1-p}{p}} \right]^{\frac{1}{p}} \right\} + C_{29} m(R_0^{\frac{1}{\tau}}) \left[\ln \frac{1}{2\rho} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (5.11)$$

Переходя в полученном неравенстве к пределу при $r \rightarrow 0$, заканчиваем доказательство теоремы 5.1 в силу произвольности ρ .

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Оценка (5.1) характеризует поточечное поведение решения в терминах $d(x, \Gamma)$, так как из (2.4) непосредственно следует неравенство

$$|u(x)| \leq M(d(x, \Gamma)) \text{ при } 0 < d(x, \Gamma) \leq r_0. \quad (5.12)$$

6. Доказательство теоремы 2.1.

Доказанная в теореме 5.1 поточечная оценка позволяет немедленно установить утверждение теоремы 2.1. Оценка (5.1) доказывает, что для решения $u(x)$ выполнено условие (1.4) теоремы Серрина [1], что обеспечивает устранимость особенности на многообразии Γ . Неулучшаемость функции $[\ln \frac{1}{r}]^{-1}$ в условии (2.6) следует из возможности построения решения уравнения p -Лапласа, имеющего неустранимую особенность на Γ порядка $[\ln \frac{1}{d(x,\Gamma)}]^{-1}$. Тем самым доказательство теоремы 2.1 закончено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Скрыпник И.И., *Об устранимости особенностей решений нелинейных эллиптических уравнений на многообразиях*, Мат. Сборник, по. (в печати).
2. Serrin J., *Local behaviour of solutions of quasilinear equations*, Acta Math. **111** (1964), 247-302.
3. Nicolosi F., Skrypnik I.V., Skrypnik I.I., *Precise point-wise growth conditions for removable isolated singularities*, Communications in PDE, no. (in print).
4. Скрыпник И.В., *О поточечных оценках некоторых емкостных потенциалов*, Общая теория граничных задач. Киев: Наукова думка (1983), 198-206.
5. Скрыпник И.В., *Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач*, М: Наука (1991).
6. Veron L., *Singularities of solutions of second order quasilinear equations*, Pitman research notes in math series **353** (1995).
7. Gilbarg D., Serrin J., *On isolated singularities of second order elliptic differential equations*, J. Anal. Mat. **4** (1955-1956), 309-340.
8. Serrin J., *Isolated singularities of solutions of quasilinear equations*, Acta Math. **113** (1965), 219-240.